

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**IL TEOREMA DI  
BLIND-MANI-KALAI  
SUI POLITOPOLI SEMPLICI**

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
**FABRIZIO CASELLI**

Presentata da:  
**VALERIA SARTI**

Sessione Unica  
Anno Accademico 2019/2020



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Prime definizioni ed Esempi</b>	<b>1</b>
1.1 Prime definizioni . . . . .	1
1.2 Esempi . . . . .	6
<b>2 Facce di Politopi</b>	<b>21</b>
2.1 Vertici, Facce e Faccette . . . . .	21
2.2 Il Reticolo delle Facce . . . . .	27
<b>3 Grafi di Politopi</b>	<b>35</b>
3.1 Rette e Funzioni Lineari in Posizione Generale . . . . .	35
3.2 Orientare gli Spigoli . . . . .	38
3.3 Il Teorema di Blind-Mani-Kalai . . . . .	42
<b>Bibliografia</b>	<b>47</b>



# Introduzione

I poligoni sono oggetti classici della geometria piana, conosciuti da tutti fin dall'infanzia. I poliedri sono le analoghe figure tridimensionali e sono oggetti belli, che hanno affascinato gli scienziati fin dall'antichità, tanto che i poliedri regolari sono noti come solidi platonici. I *politopi* sono generalizzazioni in qualsiasi numero di dimensioni dei poliedri nello spazio, o equivalentemente, dei poligoni nel piano.

In questa tesi ci siamo occupati dei politopi convessi e ci siamo concentrati soprattutto su alcuni aspetti combinatori della teoria dei politopi.

Inizialmente abbiamo cercato di costruire un'idea del concetto di politopo attraverso le prime definizioni e gli esempi, basandoci sull'intuizione. Ovviamente, gran parte della nostra intuizione geometrica deriva dalla “vita in  $\mathbb{R}^3$ ”, ma bisogna stare attenti perché questa intuizione può portare fuori strada: ci sono, infatti, molti teoremi su politopi tridimensionali i cui analoghi in dimensione maggiore non valgono.

In seguito, abbiamo analizzato la struttura combinatoria di un politopo e, in particolare, abbiamo introdotto i reticoli per poter dare una rappresentazione precisa delle facce di un politopo.

L'obiettivo finale è stato quello di dimostrare che dal grafo di un politopo semplice si può ricavare la sua intera struttura combinatoria. Basandoci sul suo articolo, abbiamo quindi percorso il metodo ideato da Kalai per identificare un politopo semplice partendo esclusivamente dal suo grafo.



# Capitolo 1

## Prime definizioni ed Esempi

Gli oggetti di base della geometria sono punti, rette, piani e così via, che sono *sottospazi affini*. Tra questi, i sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^d$  (che contengono l'origine  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$ ) sono detti *sottospazi lineari*. I sottospazi affini non vuoti sono i traslati dei sottospazi lineari.

La *dimensione* di un sottospazio affine è la dimensione dello spazio vettoriale associato, che viene anche detto la sua *giacitura*. I sottospazi affini di dimensione 0, 1, 2 e  $d - 1$  in  $\mathbb{R}^d$  sono chiamati *punti*, *rette*, *piani* e *iperpiani*, rispettivamente.

Le trasformazioni affini  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{x}_0$  rappresentano un cambiamento di coordinate affine se  $A$  è una matrice quadrata non singolare, o un'arbitraria trasformazione affine nel caso generale.

Prendiamo come assodato il fatto che i sottospazi affini possono essere descritti come l'insieme di tutte le combinazioni affini di un insieme finito di punti.

### 1.1 Prime definizioni

**Definizione 1.1** (Inviluppo affine). L'*inviluppo affine* di un insieme finito di punti  $\{P_1, \dots, P_n\}$  è l'intersezione di tutti i sottospazi affini che contengono l'insieme.

**Definizione 1.2** (Punti affinementemente indipendenti). Un insieme di  $n \geq 0$  punti si dice *affinementemente indipendente* se il suo inviluppo affine ha dimensione  $n - 1$ , cioè ogni sottoinsieme proprio ha un inviluppo affine più piccolo.

**Definizione 1.3** (Insieme convesso). Un insieme di punti  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  si dice *convesso* se per ogni coppia di punti  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$  il segmento di estremi  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$   $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} : 0 \leq \lambda \leq 1\}$  è interamente contenuto in  $K$ .

*Osservazione 1.* Un'intersezione arbitraria di insiemi convessi è convessa.

**Definizione 1.4** (Inviluppo convesso). Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^d$ . L'*inviluppo convesso* di  $K$  è il più piccolo sottoinsieme convesso di  $\mathbb{R}^d$  che contiene  $K$ , cioè l'intersezione di tutti i sottoinsiemi convessi che contengono  $K$ :

$$\text{conv}(K) := \bigcap \{K' \subseteq \mathbb{R}^d : K \subseteq K', K' \text{ convesso}\}.$$

**Proposizione 1.1.1.** Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^d$ . Allora:

$$\text{conv}(K) = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k : \{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_k\} \subseteq K, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}.$$

*Dimostrazione.*

( $\supseteq$ ) Bisogna provare che per ogni insieme finito  $\{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_k\} \subseteq K$  con  $\lambda_i \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , l'inviluppo convesso  $\text{conv}(K)$  contiene il punto  $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k$ . Questo si può vedere per induzione su  $k$ :

**passo base:** per  $k = 1$ ,  $\{\mathbf{x}_1\} \subseteq K$ ,  $\lambda_1 = 1$ .

Quindi  $\lambda_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 \in K \subseteq \text{conv}(K)$ .

**passo induttivo:** supponiamo vera l'affermazione per  $k - 1$  e la proviamo per  $k$ .

Siano  $\{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_k\} \subseteq K$  con  $\lambda_i \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ .

Se  $\lambda_k = 1$  abbiamo:

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k \in K \subseteq \text{conv}(K)$$



Se  $\lambda_k \neq 1$  abbiamo:

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k = (1 - \lambda_k) \left( \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_k} \mathbf{x}_1 + \dots + \frac{\lambda_{k-1}}{1 - \lambda_k} \mathbf{x}_{k-1} \right) + \lambda_k \mathbf{x}_k \in \text{conv}(K)$$

perché:

- per ipotesi induttiva  $\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_k} \mathbf{x}_1 + \dots + \frac{\lambda_{k-1}}{1 - \lambda_k} \mathbf{x}_{k-1} \in \text{conv}(K)$ , in quanto  $\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_k} \geq 0$  e  $\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_k} + \dots + \frac{\lambda_{k-1}}{1 - \lambda_k} = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1}}{1 - \lambda_k} = \frac{1 - \lambda_k}{1 - \lambda_k} = 1$ .
- $(1 - \lambda_k) \left( \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_k} \mathbf{x}_1 + \dots + \frac{\lambda_{k-1}}{1 - \lambda_k} \mathbf{x}_{k-1} \right) + \lambda_k \mathbf{x}_k \in \text{conv}(K)$  per definizione di insieme convesso.

( $\subseteq$ ) Per questa inclusione facciamo vedere che il membro a destra dell'uguale

$$K' = \{ \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k : \{ \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_k \} \subseteq K, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \}$$

è un insieme convesso e contiene  $K$ , poiché per definizione l'involuppo convesso di  $K$   $\text{conv}(K)$  è l'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti  $K$ .

- $K'$  è convesso poiché prendendo due qualsiasi punti di  $K'$ ,  $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k$  e  $\mu_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \mu_k \mathbf{x}_k$ , si ha che, per  $0 \leq t \leq 1$ :

$$t \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i + (1 - t) \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{x}_i \in K'$$

poiché  $t, (1 - t) \geq 0$  e la somma

$$\sum_{i=1}^k t \lambda_i + \sum_{i=1}^k (1 - t) \mu_i = t \sum_{i=1}^k \lambda_i + (1 - t) \sum_{i=1}^k \mu_i = t + 1 - t = 1.$$

- $K'$  contiene  $K$ :

se  $x \in K$ , allora  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i = 1 \mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \in K'$ . Quindi  $K \subseteq K'$ .

□

Nel seguito, enunciamo due diverse definizioni di politopo. La dimostrazione dell'equivalenza tra i due concetti non è banale e viene data con il Teorema fondamentale sui politopi.

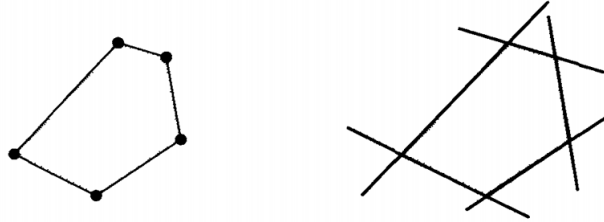
**Definizione 1.5.** Un  $\mathcal{V}$ -politopo è l'involuppo convesso di un insieme finito di punti di uno spazio  $\mathbb{R}^d$ .

**Definizione 1.6.** Un  $\mathcal{H}$ -poliedro è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di  $\mathbb{R}^d$ .

**Definizione 1.7.** Un  $\mathcal{H}$ -politopo è un  $\mathcal{H}$ -poliedro che è *limitato*, cioè è l'intersezione limitata di un numero finito di semispazi chiusi di  $\mathbb{R}^d$ .

**Definizione 1.8.** Un *politopo* è un insieme di punti  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  che può essere definito o come un  $\mathcal{V}$ -politopo o come un  $\mathcal{H}$ -politopo.

La *dimensione* di un politopo è la dimensione del suo involucpo affine. Un  $d$ -politopo è un politopo di dimensione  $d$  nello spazio  $\mathbb{R}^e$  ( $e \geq d$ ).



Il disegno illustra i due concetti: la figura a sinistra mostra un pentagono costruito come un  $\mathcal{V}$ -politopo, cioè come l'involuppo convesso di cinque punti; la figura a destra mostra lo stesso pentagono costruito come un  $\mathcal{H}$ -politopo, cioè come l'intersezione di cinque semispazi limitati dalle cinque rette.

Di solito assumiamo (senza perdere di generalità) che i politopi che studiamo sono di dimensione massima, così che  $d$  denota sia la dimensione del politopo che stiamo studiando sia la dimensione dello spazio ambiente  $\mathbb{R}^d$ .

**Definizione 1.9** (Facce). Le facce di un politopo sono le intersezioni con gli iperpiani tali che il politopo è interamente contenuto in uno dei due semispazi determinati dall'iperpiano.

*Osservazione 2.* Studieremo in dettaglio le facce di un politopo nei prossimi capitoli. Per il momento ci affidiamo all'intuizione che deriva da come sono fatti i politopi nelle dimensioni 2 e 3. Consideriamo il politopo stesso come una faccia banale. Tutte le altre facce sono dette *facce proprie*. Alcune di esse sono: l'insieme vuoto, i *vertici* del politopo (che sono punti singoli), gli *spigoli* (che sono segmenti di dimensione 1) e le *faccette* (che sono le facce proprie massimali, la cui dimensione è la dimensione del politopo meno 1). Considereremo anche le facce la cui dimensione è la dimensione del politopo meno 2, che prendono il nome di *creste*. (Nel caso di un politopo tridimensionale esse coincidono con gli spigoli.)

Vediamo le possibili relazioni tra politopi.

**Definizione 1.10.** Due politopi  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  e  $Q \subseteq \mathbb{R}^e$  si dicono *affinemente isomorfi*, indicato con  $P \cong Q$ , se esiste una trasformazione affine  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e$  che è una biiezione tra i punti dei due politopi. (Tale applicazione non deve per forza essere iniettiva o suriettiva sugli “spazi ambiente”.)

**Definizione 1.11.** Due politopi  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  e  $Q \subseteq \mathbb{R}^e$  si dicono *combinatoriamente equivalenti*, indicato con  $P \simeq Q$ , se esiste una biiezione tra le loro facce che conserva la relazione di inclusione.

Quest'ultimo è il concetto di equivalenza che considera solo la struttura combinatoria di un politopo.

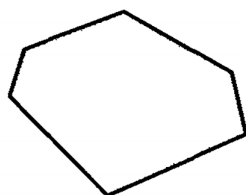
*Osservazione 3.* Se due politopi sono affinemente isomorfi allora sono combinatoriamente equivalenti, perché se esiste una trasformazione affine che è una biiezione tra i punti dei due politopi, allora questa è anche una biiezione tra le facce dei politopi che conserva l'inclusione.

Il viceversa non vale sempre, come si vede nell' Esempio 1.2.

## 1.2 Esempi

**Esempio 1.1.** I politopi 0-dimensional sono i punti, i politopi 1-dimensional sono i segmenti. Dunque, due 0-politopi qualsiasi sono affinemente isomorfi e quindi combinatoriamente equivalenti. Lo stesso vale per due 1-politopi qualsiasi.

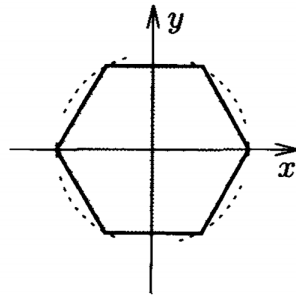
**Esempio 1.2.** I politopi 2-dimensional sono detti *poligoni*. Un poligono con  $n$  vertici è detto *n-gono*. La convessità richiede che gli angoli interni (ai vertici) siano tutti più piccoli di  $\pi$ . Il seguente disegno mostra un *esagono*.



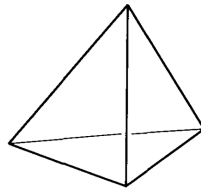
Due 2-politopi sono combinatoriamente equivalenti se e solo se hanno lo stesso numero di vertici. Quindi possiamo usare il termine l’“ $n$ -gono” convesso per la classe di equivalenza combinatoria di un 2-politopo convesso con esattamente  $n$  vertici. C’è infatti un rappresentante privilegiato per questa classe: l’*n-gono regolare*,

$$P_2(n) := \text{conv} \left\{ \left( \cos \left( \frac{2\pi k}{n} \right), \sin \left( \frac{2\pi k}{n} \right) \right) : 0 \leq k < n \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Il seguente disegno mostra l’esagono regolare  $P_2(6)$  in  $\mathbb{R}^2$ . È combinatoriamente equivalente all’esagono disegnato sopra perché i due hanno lo stesso numero di vertici. Tuttavia, non sono affinemente isomorfi in quanto non esiste una trasformazione affine che sia una biiezione tra i punti dei due politopi. Infatti, se considero tre punti non allineati e fisso le loro immagini, la trasformazione affine che manda quei punti nelle rispettive immagini è univocamente determinata.



**Esempio 1.3.** Il *tetraedro* è un oggetto geometrico familiare in  $\mathbb{R}^3$ . È un politopo di dimensione 3.



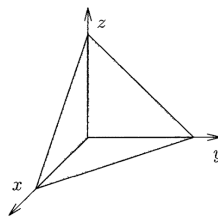
La sua generalizzazione in dimensione  $d$  forma la prima (e la più semplice) famiglia infinita di politopi di dimensione superiore che possiamo considerare.

**Definizione 1.12.** Si definisce un  $d$ -simpleso l'involuppo convesso di  $d + 1$  punti affinementemente indipendenti in uno spazio  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq d$ ).

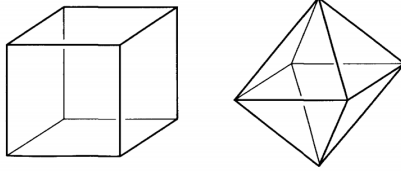
Dunque, un  $d$ -simpleso è un politopo di dimensione  $d$  con  $d + 1$  vertici. Due  $d$ -simplessi qualsiasi sono affinementemente isomorfi. È conveniente specificare un modello canonico. Per il  $d$ -simpleso usiamo il  *$d$ -simpleso standard*  $\Delta_d$  con  $d + 1$  vertici in  $\mathbb{R}^{d+1}$ ,

$$\Delta_d := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} : \mathbf{1}\mathbf{x} = 1, \mathbf{x}_i \geq 0\} = \text{conv}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d+1}\}$$

Il disegno seguente rappresenta  $\Delta_2$  in  $\mathbb{R}^3$  (il semplice standard bidimensionale):



**Esempio 1.4.** Il *cubo* tridimensionale  $C_3$  e l'*ottaedro*  $C_3^\Delta$  sono anch'essi oggetti geometrici familiari:



Come nell'esempio precedente, possiamo considerare le loro generalizzazioni in dimensione  $d$ .

**Definizione 1.13.** Si definisce l'*ipercubo* di dimensione  $d$  (o  $d$ -cubo):

$$C_d := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : -1 \leq x_i \leq 1\} = \text{conv}\{\{+1, -1\}^d\}$$

**Definizione 1.14.** Si definisce l'*iperottaedro* di dimensione  $d$ :

$$C_d^\Delta := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \sum_i |x_i| \leq 1\} = \text{conv}\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d, -\mathbf{e}_d\}$$

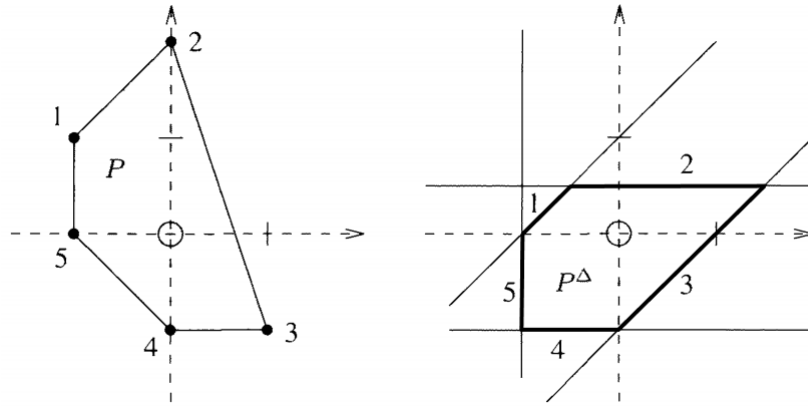
Abbiamo scelto i nostri “modelli standard” in modo che risultino simmetrici rispetto all'origine. In questo modo c'è un legame molto stretto tra i due politopi  $C_d$  e  $C_d^\Delta$ : sono uno il *polare* dell'altro.

Come d'abitudine pensiamo agli elementi di  $\mathbb{R}^d$  come vettori colonna e a quelli del suo duale  $(\mathbb{R}^d)^*$  come vettori riga.

**Definizione 1.15.** Per ogni sottoinsieme  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  si definisce il *polare* di  $P$ :

$$P^\Delta := \{\mathbf{c} \in (\mathbb{R}^d)^* : \mathbf{c}\mathbf{x} \leq 1 \quad \forall \mathbf{x} \in P\} \subseteq (\mathbb{R}^d)^*$$

**Esempio 1.5.** Il seguente disegno mostra un pentagono  $P$  nel piano, determinato dai suoi cinque vertici, e il suo polare  $P^\Delta$ , un pentagono dato da cinque disuguaglianze.



$$(-1, 1) \in P : \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \leq 1 \Rightarrow y \leq 1 + x \quad (1)$$

$$(0, 2) \in P : \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \leq 1 \Rightarrow y \leq \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$(1, -1) \in P : \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \leq 1 \Rightarrow y \geq x - 1 \quad (3)$$

$$(0, -1) \in P : \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \leq 1 \Rightarrow y \geq -1 \quad (4)$$

$$(-1, 0) \in P : \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 1 \Rightarrow x \geq -1 \quad (5)$$

**Proposizione 1.2.1.** Siano  $C_d$  e  $C_d^\Delta$  rispettivamente un ipercubo ed un iperottaedro di dimensione  $d$ . Allora essi soddisfano la relazione:

$$C_d^\Delta \cong \{\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^d)^* : \mathbf{a}\mathbf{x} \leq 1 \text{ per tutti gli } \mathbf{x} \in C_d\}$$

$$C_d \cong \{\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^d)^* : \mathbf{a}\mathbf{x} \leq 1 \text{ per tutti gli } \mathbf{x} \in C_d^\Delta\}$$

cioè questi due politopi sono uno il polare dell'altro.

*Dimostrazione.*

Il polare di  $C_d$  è

$$P_1 = \{\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^d)^* : \mathbf{a}\mathbf{x} \leq 1 \text{ per tutti gli } \mathbf{x} \text{ tali che } -1 \leq x_i \leq 1\}.$$

Il polare di  $C_d^\Delta$  è

$$P_2 = \{\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^d)^* : \mathbf{a}\mathbf{x} \leq 1 \text{ per tutti gli } \mathbf{x} \text{ tali che } \sum_i |x_i| \leq 1\}.$$

Vogliamo mostrare che  $P_1 \cong C_d^\Delta$  e che  $P_2 \cong C_d$ .

•  $P_1 \cong C_d^\Delta$  :

1.  $C_d^\Delta \subseteq P_1$ .

Sia  $\mathbf{a} \in C_d^\Delta \Rightarrow \sum_i |a_i| \leq 1$ .

Quindi per gli  $x$  tali che  $-1 \leq x_i \leq 1$  si ha

$$\mathbf{a}\mathbf{x} = \sum_i a_i x_i \leq \sum_i |a_i| |x_i| \leq \sum_i |a_i| \leq 1 \Rightarrow \mathbf{a} \in P_1.$$

2.  $P_1 \subseteq C_d^\Delta$ .

Sia  $\mathbf{a} \in P_1 \Rightarrow \mathbf{a}\mathbf{x} = \sum_i a_i x_i \leq 1$  per tutti gli  $\mathbf{x}$  tali che

$-1 \leq x_i \leq 1$ . Prendendo in particolare

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se } a_i \geq 0 \\ -1 & \text{se } a_i < 0 \end{cases}$$

abbiamo  $a_i x_i = |a_i|$ , da cui concludiamo che:

$$\sum_i a_i x_i = \sum_i |a_i| \leq 1 \Rightarrow \mathbf{a} \in C_d^\Delta.$$

•  $P_2 \cong C_d$  :

1.  $C_d \subseteq P_2$ .

Sia  $\mathbf{a} \in C_d \Rightarrow -1 \leq a_i \leq 1$ .

Per gli  $\mathbf{x}$  tali che  $\sum_i |x_i| \leq 1$  si ha

$$\mathbf{a}\mathbf{x} = \sum_i a_i x_i \leq \sum_i |a_i| |x_i| \leq \sum_i |x_i| \leq 1 \Rightarrow \mathbf{a} \in P_2.$$

2.  $P_2 \subseteq C_d$ .

Sia  $\mathbf{a} \in P_2 \Rightarrow \mathbf{a}\mathbf{x} = \sum_i a_i x_i \leq 1$  per gli  $\mathbf{x}$  tali che  $\sum_i |x_i| \leq 1$ .



Considero il caso di un vettore  $\mathbf{x}$  che ha tutte componenti nulle tranne una componente  $x_i$ , dove

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se } a_i \geq 0 \\ -1 & \text{se } a_i < 0 \end{cases}$$

in tal caso abbiamo  $\mathbf{a}\mathbf{x} = \sum_i a_i x_i = |a_i| \leq 1$ , cioè

$$-1 \leq a_i \leq 1 \Rightarrow \mathbf{a} \in C_d.$$

□

**Esempio 1.6.** Ci sono alcune utili *operazioni di riciclo* per costruire “nuovi politopi partendo da quelli vecchi”.

**Definizione 1.16.** Sia  $P$  un  $d$ -politopo e  $\mathbf{x}_0$  un punto che non appartiene all’involuppo affine di  $P$  (per questo includiamo  $P$  in  $\mathbb{R}^n$  per qualche  $n > d$ ). Allora l’involuppo convesso

$$\text{pyr}(P) := \text{conv}(P \cup \{\mathbf{x}_0\})$$

è un politopo  $(d+1)$ -dimensionale chiamato la *piramide* su  $P$ .

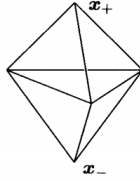
Le facce di  $\text{pyr}(P)$  sono le facce di  $P$  stesso e tutte le piramidi sulle facce di  $P$ . Esempi familiari di piramidi sono i semplici (la piramide su  $\Delta_d$  è  $\Delta_{d+1}$ ) e la *piramide egiziana*  $\text{pyr}(P_2(4))$ : la piramide su un quadrato.

**Definizione 1.17.** Sia  $P$  un  $d$ -politopo e  $\mathbf{x}_+$  e  $\mathbf{x}_-$  due punti che non appartengono all’involuppo affine di  $P$ , tali che un punto interno al segmento  $[\mathbf{x}_+, \mathbf{x}_-]$  appartenga a  $P$ . Allora l’involuppo convesso

$$\text{bipyr}(P) := \text{conv}(P \cup \{\mathbf{x}_+, \mathbf{x}_-\})$$

è un politopo di dimensione  $d+1$  chiamato *bipiramide*.

Un esempio è la bipiramide su un triangolo, che è un politopo tridimensionale.



Un altro esempio è l'iperottaedro, che è una bipiramide iterata su un punto,

$$\text{bipyr}(C_d^\Delta) = C_{d+1}^\Delta.$$

**Definizione 1.18.** Un  $d$ -politopo si dice *simpliciale* se tutte le sue facce proprie sono semplici, cioè ogni faccetta ha il minimo numero di  $d$  vertici.

**Definizione 1.19.** Un  $d$ -politopo si dice *semplice* se ogni vertice è in comune al numero minimo di faccette, ovvero  $d$ .

*Osservazione 4.* Il fatto che in un  $d$ -politopo  $P$  ogni vertice appartenga ad *almeno*  $d$  faccette può essere visto considerando il suo polare. Infatti, per ogni affermazione sulla struttura combinatoria di un politopo c'è una “affermazione polare” che scambia l'inclusione delle facce e scambia:

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longleftrightarrow & P \\ \text{vertici} & \longleftrightarrow & \text{faccette} \\ \text{spigoli} & \longleftrightarrow & \text{creste} \\ \dots & \longleftrightarrow & \dots \end{array}$$

Quindi, se ci fosse un vertice del politopo appartenente a *meno* di  $d$  faccette, il suo polare avrebbe una faccetta con *meno* di  $d$  vertici. Questo non può succedere poiché la dimensione di una faccetta è  $d - 1$ .

*Osservazione 5.* L'iperottaedro di dimensione  $d$  è simpliciale.

*Dimostrazione.* L'iperottaedro è una bipiramide iterata su un punto, la quale è simpliciale perché le faccette di una bipiramide sono semplici, e rimangono semplici anche quando aggiungiamo due punti per costruire la bipiramide di dimensione maggiore.  $\square$

*Osservazione 6.* L'ipercubo di dimensione  $d$  è semplice.

*Dimostrazione.* Esso ha  $2d$  faccette che giacciono sugli iperpiani  $x_i = \pm 1$ , dunque ogni vertice appartiene esattamente a  $d$  faccette.  $\square$

**Definizione 1.20.** Siano  $P \subseteq \mathbb{R}^p$  e  $Q \subseteq \mathbb{R}^q$  due politopi. Il loro prodotto è definito come l'insieme:

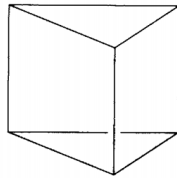
$$P \times Q := \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} : \mathbf{x} \in P, \mathbf{y} \in Q \right\}.$$

Otteniamo un politopo di dimensione  $\dim(P) + \dim(Q)$ , le cui facce non vuote sono i prodotti di facce non vuote di  $P$  e facce non vuote di  $Q$ .

**Definizione 1.21.** Il *prisma* su un politopo  $P$  è il prodotto di  $P$  con un segmento,

$$\text{prism}(P) := P \times \Delta_1.$$

Un esempio è il *prisma triangolare*, ovvero il prisma su un triangolo:  $\Delta_2 \times \Delta_1$ .



**Esempio 1.7.** La *curva del momento* in  $\mathbb{R}^d$  è definita da

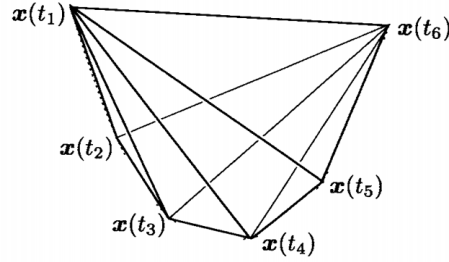
$$\mathbf{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad t \longmapsto \mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d.$$

Il *politopo ciclico*  $C_d(t_1, \dots, t_n)$  è l'involuppo convesso

$$C_d(t_1, \dots, t_n) := \text{conv}(\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n))$$

di  $n > d$  punti distinti  $\mathbf{x}(t_i)$ , con  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , sulla curva del momento. Grazie alla “condizione di parità di Gale”, vedremo che i punti  $\mathbf{x}(t_i)$  sono i

vertici e la classe di equivalenza combinatoria del politopo non dipende dalla scelta dei parametri  $t_i$ . Questo giustifica il fatto che indichiamo tale politopo con  $C_d(n)$  e lo chiamiamo “il”  $d$ -politopo ciclico con  $n$  vertici. Il disegno mostra  $C_3(6)$ .



**Teorema 1.2.2 (Condizione di parità di Gale).**

Sia  $n > d \geq 2$ . Denotiamo con  $[n]$  l'insieme  $\{1, \dots, n\}$  e scegliamo  $t_1, \dots, t_n$  parametri reali. Il politopo ciclico

$$C_d(n) = \text{conv}\{\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n)\}$$

è un  $d$ -politopo simpliciale.

Un sottoinsieme di  $d$  elementi  $S \subseteq [n]$  forma una faccetta di  $C_d(n)$  se e solo se la seguente “condizione di parità” è soddisfatta:

Se  $i < j$  non stanno in  $S$ , allora il numero di  $k \in S$  tra  $i$  e  $j$  è pari:

$$2 \mid \#\{k : k \in S, i < k < j\} \quad \text{per } i, j \notin S.$$

*Dimostrazione.* È sufficiente mostrare che presi  $d + 1$  punti qualsiasi sulla curva del momento, questi sono affinemente indipendenti. Per vederlo, mostriamo che l’involuppo affine (che è un sottospazio affine) di questi punti ha dimensione  $d$ , cioè la sua giacitura ha dimensione  $d$ . Per vedere questo basta osservare che il determinante della seguente matrice è diverso da 0.

Dall’identità del determinante di Vandermonde:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mathbf{x}(t_0) & \mathbf{x}(t_1) & \dots & \mathbf{x}(t_d) \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0 & t_1 & \dots & t_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^{d-1} & t_1^{d-1} & \dots & t_d^{d-1} \\ t_0^d & t_1^d & \dots & t_d^d \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq d} (t_j - t_i) \neq 0 \quad \forall i \neq j.$$

Quindi, presi  $d+1$  punti sulla curva del momento, questi non sono affinemente dipendenti. Segue che  $C_d(n)$  è un  $d$ -politopo simpliciale.

Sia  $S = \{i_1, \dots, i_d\} \subseteq [n]$ . L'iperpiano  $H_S$  che passa per i punti corrispondenti  $\mathbf{x}(t_{i_s})$  è dato da

$$H_S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : F_S(\mathbf{x}) = 0\},$$

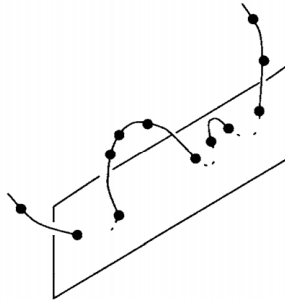
dove

$$F_S(\mathbf{x}) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mathbf{x} & \mathbf{x}(t_{i_1}) & \dots & \mathbf{x}(t_{i_d}) \end{pmatrix}$$

Infatti,  $F_S(\mathbf{x})$  è una funzione lineare in  $\mathbf{x}$  che si annulla nei punti prescritti.

Facciamo muovere  $\mathbf{x}(t)$  sulla curva del momento  $\{\mathbf{x}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ .

Notiamo che  $F_S(\mathbf{x}(t))$  è un polinomio in  $t$  di grado  $d$  che si annulla per  $t = t_{i_s}$ . Perciò tale polinomio ha  $d$  zeri distinti e cambia di segno in corrispondenza di ognuno di essi.



Allora  $S$  forma una faccetta se e solo se  $F_S(\mathbf{x}(t_i))$  ha lo stesso segno per tutti i punti  $\mathbf{x}(t_i)$  con  $i \in [n] \setminus S$ , cioè se  $F_S(\mathbf{x}(t))$  ha un numero pari di cambi di segno tra  $t = t_i$  e  $t = t_j$ , per  $i < j$  e  $i, j \in [n] \setminus S$ .

In particolare, questo criterio mostra che la classe combinatoria di  $C_d(t_1, \dots, t_n)$  non dipende dalla scelta specifica dei parametri  $t_i$ , quindi  $C_d(n)$  è ben definito come classe di equivalenza combinatoria di politopi.  $\square$

### Esempio 1.8.

Il *permutaedro*  $\Pi_{d-1} \in \mathbb{R}^d$  è definito come l'involuppo convesso di tutti i

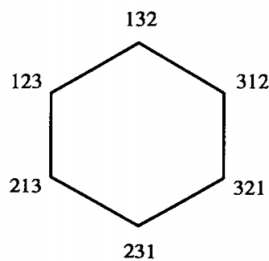
vettori che sono ottenuti permutando le coordinate del vettore  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ d \end{pmatrix}$ .

I suoi vertici possono essere identificati con le permutazioni in  $\mathcal{S}_d$ .

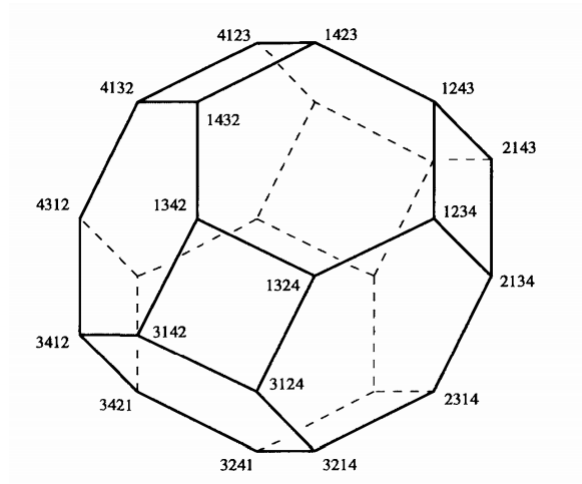
Cioè bisogna associare a  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$  la permutazione tale che  $x_i \mapsto i$ ), in modo

tale che due vertici sono connessi da uno spigolo se e solo se le corrispondenti permutazioni differiscono di una trasposizione adiacente.

Questo fatto lo constatiamo nei seguenti disegni di  $\Pi_2$  :



e di  $\Pi_3$  :



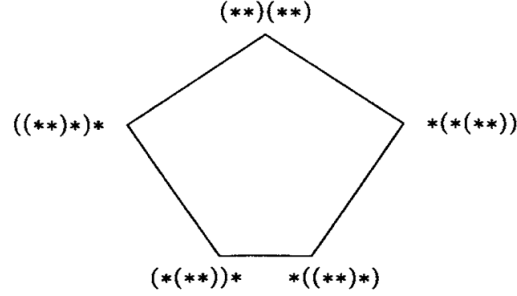
Le  $k$ -facce di  $\Pi_{d-1}$  corrispondono alle partizioni ordinate dell'insieme  $[d]$  in  $d - k$  parti non vuote. Perciò i vertici sono permutazioni e le faccette sono partizioni di  $[d]$  in  $(S, [d] \setminus S)$  con  $\emptyset \subset S \subset [d]$ .

**Esempio 1.9.** L'associaedro  $K_{n-2}$  è un politopo i cui vertici corrispondono ai modi differenti di mettere tra parentesi una sequenza di  $n$  simboli usando queste regole:

- non si può mettere tra parentesi l'intera sequenza
- non si possono mettere le parentesi intorno ad uno o a zero simboli

Cioè, i vertici corrispondono ai modi differenti di moltiplicare un'espressione  $a_1 a_2 \dots a_n$  quando la moltiplicazione non è associativa.

Due vertici sono adiacenti se corrispondono ad una applicazione singola della legge associativa. Il disegno mostra il 5-gono, ovvero il *pentagono*, ottenuto come  $K_{n-2}$  per  $n = 4$ .



*Osservazione 7.* L'associaedro  $K_{n-2}$  è un politopo semplice poiché ogni vertice è in comune al numero minimo di  $n - 2$  spigoli, ovvero ogni vertice ha esattamente  $n - 2$  vertici adiacenti.

Dal disegno si vede, ad esempio, che preso un vertice di  $K_2$  ci sono esattamente 2 modi per applicare una volta la legge associativa (cioè per “spostare” una coppia di parentesi seguendo le regole).

In generale, preso un vertice di  $K_{n-2}$ , questo corrisponde alla sequenza di  $n$  simboli raggruppati da  $n - 2$  coppie di parentesi, e ci sono  $n - 2$  modi per spostare una coppia parentesi seguendo le regole.

Approfondiamo le definizioni che abbiamo dato e ne introduciamo alcune nuove che saranno fondamentali per gli argomenti che affronteremo nei prossimi capitoli.

**Definizione 1.22.** Un  $\mathcal{H}$ -poliedro è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi in  $\mathbb{R}^d$ , cioè è un insieme  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  tale che

$$P = P(A, \mathbf{z}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : A\mathbf{x} \leq \mathbf{z}\} \text{ con } A \in \mathbb{R}^{m \times d}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m.$$

(dove  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$  indica un sistema di disuguaglianze  $\mathbf{a}_1\mathbf{x} \leq z_1, \dots, \mathbf{a}_m\mathbf{x} \leq z_m$ , dove  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  sono le righe di  $A$  e  $z_1, \dots, z_m$  sono le componenti di  $\mathbf{z}$ .)

**Definizione 1.23.** Un *cono* è un insieme non vuoto di vettori  $C \subseteq \mathbb{R}^d$  tale che per ogni sottoinsieme finito di vettori contiene anche tutte le loro combinazioni lineari a coefficienti non negativi.



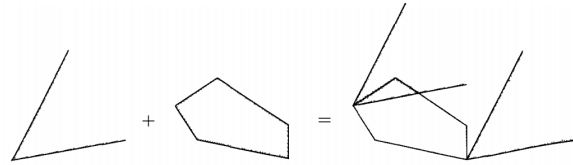
*Osservazione 8.* Ogni cono contiene il vettore nullo  $\mathbf{0}$ .

**Definizione 1.24.** Sia  $Y \subseteq \mathbb{R}^d$  un sottoinsieme arbitrario. L'*inviluppo conico*  $\text{cone}(Y)$  è l'intersezione di tutti i coni in  $\mathbb{R}^d$  che contengono  $Y$ .

*Osservazione 9.* L'inviluppo conico è un cono poiché l'intersezione di una famiglia qualsiasi di coni è un cono.

**Definizione 1.25.** La somma vettoriale (o di Minkowski) di due insiemi  $P, Q \subseteq \mathbb{R}^d$  è così definita:

$$P + Q := \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in P, \mathbf{y} \in Q\} \subseteq \mathbb{R}^d$$



Nel disegno è rappresentata la somma di Minkowski 2-dimensionale di un cono e un politopo.

**Definizione 1.26.** Un  $\mathcal{V}$ -poliedro è una combinazione conica convessa finitamente generata, cioè è un insieme  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  dato nella forma

$$P = \text{conv}(V) + \text{cone}(Y) \quad \text{con } V \in \mathbb{R}^{d \times n}, Y \in \mathbb{R}^{d \times n'}$$

cioè è la somma di Minkowski dell'inviluppo convesso di un insieme finito di punti e del cono generato da un insieme finito di vettori.

*Osservazione 10.* Un  $\mathcal{V}$ -politopo è un  $\mathcal{V}$ -poliedro limitato. Per vederlo bisogna verificare che  $\text{conv}(V)$  è sempre limitato.

*Osservazione 11.* Sappiamo che un  $\mathcal{H}$ -politopo è un  $\mathcal{H}$ -poliedro limitato.



## Capitolo 2

# Facce di Politopi

In questo capitolo trattiamo le facce e il reticolo delle facce di un politopo. Quasi tutti i risultati sono “geometricamente chiari” e, per quanto abbiamo bisogno dell’algebra per verificarli, li otteniamo con calcoli semplici e usando il lemma di Farkas.

### 2.1 Vertici, Facce e Faccette

**Definizione 2.1.** Sia  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  un politopo convesso. Una disuguaglianza lineare  $\mathbf{c}\mathbf{x} \leq c_0$  è *valida* per  $P$  se vale per tutti i punti  $\mathbf{x} \in P$ .

Una *faccia* di  $P$  è ogni insieme della forma

$$F = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{c}\mathbf{x} = c_0\}$$

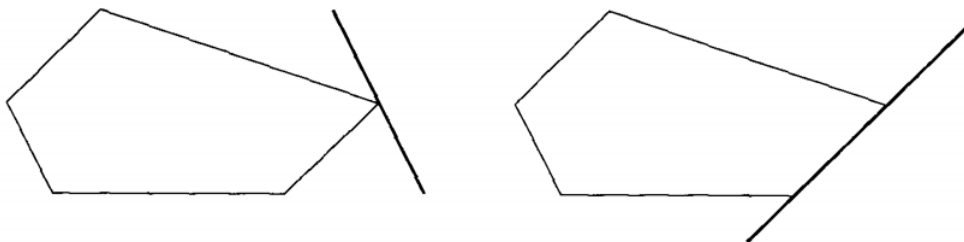
dove  $\mathbf{c}\mathbf{x} \leq c_0$  è una disuguaglianza valida per  $P$ .

La *dimensione* di una faccia è la dimensione del suo involucro affine:

$$\dim(F) := \dim(\text{aff}(F)).$$

Per la disuguaglianza valida  $0\mathbf{x} \leq 0$ , otteniamo che  $P$  stesso è una faccia di  $P$ . Tutte le altre facce di  $P$ , che soddisfano  $F \subset P$ , sono chiamate facce *proprie*. Per la disuguaglianza  $0\mathbf{x} \leq 1$ , vediamo che  $\emptyset$  è sempre una faccia di  $P$ .

Il seguente disegno mostra due disuguaglianze valide per un 2-politopo. Esse definiscono un vertice ed uno spigolo, rispettivamente.



Nelle seguenti due proposizioni vediamo alcuni fatti fondamentali sulle facce. Indichiamo con  $\text{vert}(P)$  insieme di tutti i vertici di  $P$ .

Premettiamo il Lemma di Farkas, che utilizzeremo per dimostrare la prima di queste proposizioni. Tale lemma fornisce una caratterizzazione per la risolubilità di un sistema di disuguaglianze e ci sono molti modi diversi per formularlo. La versione che utilizzeremo è la seguente, che vale per soluzioni non negative di sistemi di disuguaglianze:

**Lemma 2.1.1 (Lemma di Farkas).**

Sia  $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$  e  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ .

**O** esiste un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  tale che  $A\mathbf{x} = \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ ,

**oppure** esiste un vettore riga  $\mathbf{c} \in (\mathbb{R}^m)^*$  tale che  $\mathbf{c}A \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{c}\mathbf{z} < 0$ , ma non entrambe le cose.

**Proposizione 2.1.2.** Sia  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  un politopo.

- (i) Ogni politopo è l'involuppo convesso dei suoi vertici:  $P = \text{conv}(\text{vert}(P))$ .
- (ii) Se un politopo può essere scritto come l'involuppo convesso di un insieme finito di punti, allora l'insieme contiene tutti i vertici del politopo:  $P = \text{conv}(V)$  implica che  $\text{vert}(P) \subseteq V$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $P = \text{conv}(V)$ . Se un vettore  $\mathbf{v}_i \in V$  può essere scritto come combinazione

convessa degli altri vettori in  $V$ , allora possiamo ottenere un insieme più piccolo di punti  $V' := V \setminus \mathbf{v}_i$ , il cui involucro convesso è  $\text{conv}(V') = P$ .

Ora affermiamo che se  $\mathbf{v}_i$  non può essere espresso come una combinazione convessa di  $V' = V \setminus \mathbf{v}_i$ , allora è un vertice di  $P$ .

Usando il lemma di Farkas, otteniamo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_i \notin \text{conv}(V') &\iff \nexists \mathbf{t} \geq \mathbf{0} : \mathbf{v}_i = V' \mathbf{t}, \mathbf{1} \mathbf{t} = 1 \\
 &\iff \nexists \mathbf{t} \geq \mathbf{0} : \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ V' \end{pmatrix} \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v}_i \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{\text{FL}}{\iff} \exists \mathbf{a} : \mathbf{a} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ V' \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v}_i \end{pmatrix} < 0 \\
 &\iff \exists (\beta, -\mathbf{b}) = \mathbf{a} : \mathbf{b} V' \leq \beta \mathbf{1}, \mathbf{b} \mathbf{v}_i > \beta \\
 &\iff \exists \beta, \mathbf{b} : \mathbf{b} \mathbf{v}_j \leq \beta \text{ per } j \neq i, \mathbf{b} \mathbf{v}_i > \beta.
 \end{aligned}$$

Allora  $\mathbf{v}_i$  è un vertice, definito dalla disuguaglianza valida  $\mathbf{b} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \mathbf{v}_i$ .

Infine osserviamo che un vertice  $\mathbf{v}_i$  di  $P$  non può mai essere scritto come una combinazione convessa di punti in  $P \setminus \mathbf{v}_i$ . Ciò conclude la dimostrazione di (i) e (ii).  $\square$

**Proposizione 2.1.3.** *Sia  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  un politopo e  $V := \text{vert}(P)$ . Sia  $F$  una faccia di  $P$ .*

- (i) *La faccia  $F$  di  $P$  è un politopo, con  $\text{vert}(F) = F \cap V$ .*
- (ii) *Ogni intersezione di facce di  $P$  è una faccia di  $P$ .*
- (iii) *Le facce di  $F$  sono esattamente le facce di  $P$  che sono contenute in  $F$ .*
- (iv)  *$F = P \cap \text{aff}(F)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $F$  definita dalla disuguaglianza valida  $\mathbf{c} \mathbf{x} \leq c_0$ .

Per la prima affermazione di (i), vediamo che  $F$  è un politopo dalla caratterizzazione dei politopi come intersezioni limitate di semispazi:  $F$  è l'intersezione di un politopo  $P$  con un poliedro (iperpiano)

$$H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{c}\mathbf{x} = c_0\}.$$

Inoltre  $F \subseteq \text{aff}(F) \subseteq H$ , che prova (iv).

Per la seconda affermazione di (i), vediamo che  $\text{vert}(F) \supseteq F \cap V =: V_0$ . Per l'inclusione opposta, sia  $\mathbf{x} \in F$ , allora  $\mathbf{x}$  può essere rappresentato come  $\mathbf{x} = V\mathbf{t}$ , con  $\mathbf{t} \geq 0$ ,  $\mathbf{1}\mathbf{t} = 1$ . Dunque

$$c_0 = \mathbf{c}\mathbf{x} = \mathbf{c}(V\mathbf{t}) = (\mathbf{c}V)\mathbf{t} \leq c_0\mathbf{1}\mathbf{t} = c_0,$$

cioè  $(\mathbf{c}v_i - c_0)t_i = 0$  per tutti gli  $i$ .

Quindi  $t_i = 0$  per tutti gli  $i$  tali che  $v_i \notin V_0$ , e quindi  $\mathbf{x} \in \text{conv}(V_0)$ .

Da questo vediamo che  $F = \text{conv}(V_0)$ , e quindi  $\text{vert}(F) \subseteq V_0$  per la Proposizione 2.1.2 (ii). Questo completa la dimostrazione di (i).

Per la (ii), siano

$$F = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{c}\mathbf{x} = c_0\}$$

e

$$G = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{b}\mathbf{x} = b_0\}$$

per le disuguaglianze  $\mathbf{c}\mathbf{x} \leq c_0$  e  $\mathbf{b}\mathbf{x} \leq b_0$  che sono valide per  $P$ . Allora la disuguaglianza  $(\mathbf{c} + \mathbf{b})\mathbf{x} \leq c_0 + b_0$  è valida per  $P$  e

$$P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : (\mathbf{c} + \mathbf{b})\mathbf{x} = c_0 + b_0\} = F \cap G.$$

Proviamo la (iii).

Se  $G \subseteq F$  è una faccia di  $P$ , allora è anche una faccia di  $F$ .

Per l'inclusione opposta, sia  $F = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{c}\mathbf{x} = c_0\}$  ( $F$  è una faccia di  $P$ ) e  $G = F \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{b}\mathbf{x} = b_0\} \subseteq F$  ( $G$  è una faccia di  $F$ ), dove  $\mathbf{c}\mathbf{x} \leq c_0$  è valida per  $P$  e  $\mathbf{b}\mathbf{x} \leq b_0$  è valida per  $F$  ma non necessariamente per  $P$ .

Sia  $V_0 := \text{vert}(F)$  come prima e  $V_1 := V \setminus V_0$  (sono i vertici di  $P$  che non stanno in  $F$ ). Possiamo assumere che  $F \neq P$  e quindi  $V_1 \neq \emptyset$ .

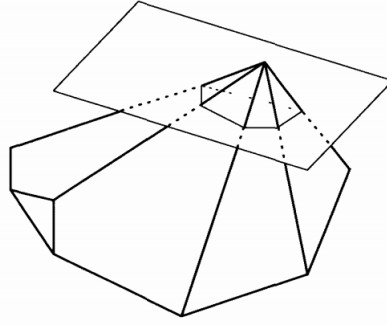
Ora  $(\mathbf{b} + \lambda \mathbf{c})\mathbf{x} \leq b_0 + \lambda c_0$  è valida per  $F \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$  (poichè per  $F$  valgono  $\mathbf{c}\mathbf{x} = c_0$  e  $\mathbf{b}\mathbf{x} \leq b_0$ ), e definisce  $G$  come una faccia di  $F$ .

Scegliamo quindi  $\lambda$  grande abbastanza da soddisfare  $\lambda > -\frac{b_0 - \mathbf{b}\mathbf{v}}{c_0 - \mathbf{c}\mathbf{v}}$  per tutti i  $\mathbf{v} \in V_1$ . Allora otteniamo che  $(\mathbf{b} + \lambda \mathbf{c})\mathbf{x} \leq b_0 + \lambda c_0$  è valida con la disuguaglianza stretta per tutti i  $\mathbf{v} \in V_1$ . Infatti:

$$(\mathbf{b} + \lambda \mathbf{c})\mathbf{v} < b_0 + \lambda c_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(c_0 - \mathbf{c}\mathbf{v}) > (\mathbf{b}\mathbf{v} - b_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(c_0 - \mathbf{c}\mathbf{v}) > -(b_0 - \mathbf{b}\mathbf{v})$$

Concludiamo che  $G$  è una faccia di  $P$ . □

Mostriamo un'altra costruzione: la “*figura al vertice*”, ottenuta tagliando un politopo attraverso un iperpiano che taglia via un singolo vertice.



Consideriamo un politopo  $P$  con  $V = \text{vert}(P)$  e un vertice  $\mathbf{v} \in V$ .

Sia  $\mathbf{c}\mathbf{x} \leq c_0$  una disuguaglianza valida con

$$\{\mathbf{v}\} = P \cap \{\mathbf{x} : \mathbf{c}\mathbf{x} = c_0\}.$$

Scegliamo  $c_1 < c_0$  tale che  $\mathbf{c}\mathbf{v}' < c_1 \ \forall \mathbf{v}' \in V \setminus \mathbf{v}$ , e definiamo “*figura al vertice*” di  $P$  in  $\mathbf{v}$  come il politopo

$$P/\mathbf{v} := P \cap \{\mathbf{x} : \mathbf{c}\mathbf{x} = c_1\}.$$

Notiamo che la costruzione di  $P/\mathbf{v}$  dipende dalla scelta di  $c_1$  e dalla disuguaglianza  $\mathbf{c}\mathbf{x} \leq c_0$ . Tuttavia il risultato seguente mostra che la classe combinatoria di  $P/\mathbf{v}$  è indipendente da ciò.

**Proposizione 2.1.4.** *C'è una biiezione tra le facce  $k$ -dimensionali di  $P$  che contengono  $\mathbf{v}$  e le facce  $(k-1)$ -dimensionali di  $P/\mathbf{v}$ , data da*

$$\begin{aligned} \pi : \quad F &\longrightarrow F \cap \{\mathbf{x} : \mathbf{c}\mathbf{x} = c_1\} \\ \sigma : \quad P \cap \text{aff}(\{\mathbf{v}\} \cup F') &\longleftarrow F' \end{aligned}$$

*Dimostrazione.*

Denotiamo l'“iperpiano di taglio” con  $H := \{\mathbf{x} : \mathbf{c}\mathbf{x} = c_1\}$ .

Mostriamo innanzitutto che queste due applicazioni sono ben poste:

- $\pi$  è ben posta

Sia  $F = P \cap \{\mathbf{x} : \mathbf{b}\mathbf{x} = b_0\}$  faccia di  $P$  contenente  $\mathbf{v}$ ; allora otteniamo che  $F \cap H = (P \cap H) \cap \{\mathbf{x} : \mathbf{b}\mathbf{x} = b_0\}$ , dove  $\mathbf{b}\mathbf{x} \leq b_0$  è valida per  $P$ , quindi anche per  $P/\mathbf{v} = P \cap H$ . Da cui  $F \cap H$  è una faccia di  $P/\mathbf{v}$ .

- $\sigma$  è ben posta

Sia  $F' = (P \cap H) \cap \{\mathbf{x} : \mathbf{b}\mathbf{x} = b_0\}$ , dove  $\mathbf{b}\mathbf{x} \leq b_0$  è valida per  $P/\mathbf{v}$  ( $F'$  faccia di  $P/\mathbf{v}$ ). Allora  $(\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c})\mathbf{x} \leq b_0 + \lambda c_1$  è valida per  $P/\mathbf{v}$ , per tutti i  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Un calcolo mostra che per

$$\lambda_0 := \frac{b_0 - \mathbf{b}\mathbf{v}}{c_0 - c_1}$$

la disuguaglianza è valida per  $P$ , con l'uguaglianza per  $\mathbf{v}$ .

Se consideriamo  $\mathbf{v}' \in V \setminus \mathbf{v}$ , allora sappiamo che  $\mathbf{c}\mathbf{v}' < c_1$  e  $\mathbf{c}\mathbf{v} = c_0 > c_1$ , quindi:

$$\mathbf{v}'' := \frac{(\mathbf{c}\mathbf{v} - c_1)\mathbf{v}' + (c_1 - \mathbf{c}\mathbf{v}')\mathbf{v}}{\mathbf{c}\mathbf{v} - \mathbf{c}\mathbf{v}'} \in P \cap H = P/\mathbf{v}.$$

Ora,  $\mathbf{v}''$  è una combinazione convessa di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$ , quindi  $\mathbf{v}'' \in P$ .

Inoltre  $\mathbf{v}'' \in H$ , poiché  $\mathbf{c}\mathbf{v}'' = c_1$ .

Da  $(\mathbf{b} + \lambda_0\mathbf{c})\mathbf{v}'' \leq b_0 + \lambda_0 c_1$  e  $(\mathbf{b} + \lambda_0\mathbf{c})\mathbf{v} = b_0 + \lambda_0 c_1$ ,

otteniamo  $(\mathbf{b} + \lambda_0\mathbf{c})\mathbf{v}' \leq b_0 + \lambda_0 c_1$ .

Ora verifichiamo che le mappe  $\sigma$  e  $\pi$  sono una l'inversa dell'altra:

$$\pi \circ \sigma(F') = H \cap P \cap \text{aff}(\{\mathbf{v}\} \cup F') = P \cap H \cap \text{aff}(F') = P/\mathbf{v} \cap \text{aff}(F') = F',$$



dove l'ultima uguaglianza deriva dalla Proposizione 2.1.3 (iv). Similmente,

$$\sigma \circ \pi(F) = P \cap \text{aff}(\{\mathbf{v}\} \cup (F \cap H)) \stackrel{*}{=} P \cap \text{aff}(F) = F,$$

dove per l'uguaglianza  $*$  usiamo il fatto che ogni vertice  $\mathbf{v}'$  di  $F$  può essere ottenuto come combinazione affine di  $\mathbf{v}$  e di  $\mathbf{v}'' \in F \cap H$ .

Infine osserviamo che, se  $F'$  è una faccia di  $P/\mathbf{v}$  di dimensione  $k-1$ , allora la faccia associata  $F$  di  $P$  ha dimensione  $k$ , dal momento che il suo involucro affine è  $\text{aff}(F) = \text{aff}(F' \cup \{\mathbf{v}\})$ , dove  $\mathbf{v} \notin \text{aff}(F')$  per costruzione.  $\square$

## 2.2 Il Reticolo delle Facce

In questa sezione traduciamo alcuni dei risultati sui politopi in affermazioni puramente combinatorie. Per fare ciò abbiamo bisogno di un po' di terminologia sugli *insiemi finiti parzialmente ordinati* ("posets").

Definiamo i concetti chiave.

### Definizione 2.2 (Terminologia sui posets).

Un *poset*  $(S, \leq)$  è un insieme finito parzialmente ordinato, cioè, un insieme finito  $S$  dotato di una relazione " $\leq$ " che è:

- riflessiva ( $x \leq x, \forall x \in S$ ),
- antisimmetrica ( $x \leq y$  e  $y \leq x \Rightarrow x = y$ ),
- transitiva ( $x \leq y$  e  $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ).

Di solito un poset viene indicato con  $S$ , quando l'ordine parziale è chiaro.

Ogni sottoinsieme di  $S$  è a sua volta un poset con l'ordine parziale indotto.

Una *catena* di  $S$  è un sottoinsieme di  $S$  totalmente ordinato. La sua *lunghezza* è il numero dei suoi elementi meno 1.

Per due elementi  $x, y \in S$  con  $x \leq y$ , denotiamo con

$$[x, y] := \{w \in S; x \leq w \leq y\}$$

l'intervallo tra  $x$  e  $y$ .

Un intervallo in  $S$  è *booleano* se è isomorfo all'insieme parzialmente ordinato di tutti i sottoinsiemi di un insieme con  $k$  elementi, per qualche  $k$ , indicato con  $B_k = (2^{[k]}, \subseteq)$ .

Un poset è *limitato* se ha un unico elemento *minimale*, denotato con  $\hat{0}$ , e un unico elemento *massimale*, denotato con  $\hat{1}$ . La *parte propria* di un poset limitato  $S$  è  $\bar{S} := S \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$ .

Un poset è *graduato* se è limitato e ogni catena massimale (cioè tale che non esiste nessuna catena che la contiene come sottoinsieme proprio) ha la stessa lunghezza.

In questo caso la lunghezza di una catena massimale nell'intervallo  $[\hat{0}, x]$  è il *rango* di  $x$ , denotato con  $r(x)$ .

Il rango  $r(S) := r(\hat{1})$  è anche chiamato la *lunghezza* di  $S$ .

Per esempio, ogni catena  $C$  è un poset graduato, con  $r(C) = |C| - 1$  e i posets booleani  $B_k$  sono graduati di lunghezza  $r(B_k) = k$ .

Un poset è un *reticolo* se:

- è limitato
- ogni coppia di elementi  $x, y \in S$  ha un unico estremo superiore in  $S$ , chiamato *sup*,  $x \vee y$
- ogni coppia di elementi  $x, y \in S$  ha un unico estremo inferiore in  $S$ , chiamato *inf*,  $x \wedge y$

In realtà, due qualsiasi di queste tre condizioni implicano la terza.

Se  $S$  è un reticolo graduato, chiamiamo gli elementi minimali di  $S \setminus \hat{0}$  i suoi *atomi*, e gli elementi massimali di  $S \setminus \hat{1}$  i suoi *coatomi*. Equivalentemente, gli atomi sono gli elementi di rango 1 ed i coatomi sono gli elementi di rango  $r(S) - 1$ .

Un reticolo è *atomico* se ogni suo elemento si può esprimere come estremo superiore di atomi:  $x = a_1 \vee a_2 \cdots \vee a_k$ , per  $k \geq 0$ , dove otteniamo  $x = \hat{0}$  per

$k = 0$ , e un atomo  $x = a_1$  per  $k = 1$ . Analogamente, un reticolo è *coatomico* se ogni elemento si può esprimere come estremo inferiore di coatomi.

Definiamo il *poset opposto*  $S^{op}$  (o *duale*) con lo stesso insieme sottostante  $S$ , dove  $x \leq y$  in  $S^{op}$  se e solo se  $y \leq x$  vale in  $S$ .

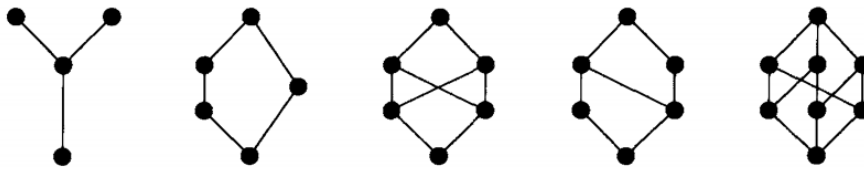
Per rappresentare graficamente un poset  $S$ , usiamo un *diagramma di Hasse*, cioè, un grafo disegnato nel piano in modo che ogni elemento di  $S$  corrisponde ad un vertice.

( $x \leq y$  vale se e solo se c'è un cammino crescente da  $x$  ad  $y$ .)

Viene tracciata una linea che va da un vertice  $x$  ad un vertice  $y$  se e solo se c'è una *relazione di copertura* tra  $x$  e  $y$ , ovvero se:

- $x < y$
- $[x, y] = \{x, y\}$  (cioè  $\nexists z$  tale che  $x < z < y$ )

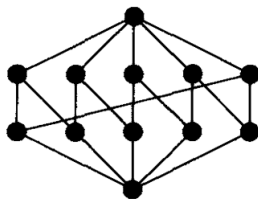
Degli insiemi parzialmente ordinati del seguente disegno, il primo non è limitato, ma tutti gli altri lo sono. Il secondo è un reticolo, ma non è graduato. Il terzo è graduato (di lunghezza 3), ma non è un reticolo. Il quarto è un reticolo graduato (di lunghezza 3) e il quinto è anche booleano (isomorfo a  $B_3$ ). Il quarto non è né atomico né coatomico, mentre il quinto lo è.



Questo è interessante perchè vogliamo studiare l'insieme delle facce di un politopo convesso, ordinate dall'inclusione.

**Definizione 2.3.** Il *reticolo delle facce* di un politopo convesso  $P$  è il poset  $L := L(P)$  di tutte le facce di  $P$ , parzialmente ordinate dall'inclusione.

Il seguente disegno mostra un esempio: il reticolo delle facce di un pentagono convesso.

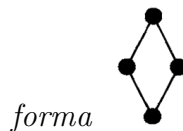


Qui l'elemento minimale corrisponde alla faccia vuota, i cinque atomi nello strato sopra corrispondono ai cinque vertici, lo strato sopra a questo rappresenta i cinque spigoli (ognuno contenente due vertici) e l'elemento superiore rappresenta il pentagono stesso.

Nel Teorema 2.2.1 riassumiamo le principali proprietà strutturali dei reticoli delle facce, partendo dal fatto che *sono* reticoli, giustificando la terminologia della Definizione 2.3.

**Teorema 2.2.1.** *Sia  $P$  un politopo convesso.*

- (i) *Per ogni politopo  $P$  l'insieme finito parzialmente ordinato delle facce  $L(P)$  è un reticolo graduato di lunghezza  $\dim(P) + 1$ , con funzione rango  $r(F) = \dim(F) + 1$ .*
- (ii) *Ogni intervallo  $[G, F]$  di  $L(P)$  è il reticolo delle facce di un politopo convesso di dimensione  $r(F) - r(G) - 1$ .*
- (iii) (“Diamond property”) *Ogni intervallo di lunghezza 2 ha esattamente quattro elementi. Cioè, se  $G \subseteq F$  con  $r(F) - r(G) = 2$ , allora ci sono esattamente due facce  $H$  con  $G \subset H \subset F$ , e l'intervallo  $[G, F]$  è della*



- (iv) *Il poset opposto  $L(P)^{op}$  è il poset delle facce di un politopo convesso.*
- (v) *Il reticolo delle facce  $L(P)$  è sia atomico sia coatomico.*

*Dimostrazione.*

Proviamo innanzitutto che  $L(P)$  è un reticolo.

Per provarlo è sufficiente vedere che ha un unico elemento massimale  $\hat{1} = P$  e un unico elemento minimale  $\hat{0} = \emptyset$ , e che gli estremi inferiori esistono, con  $F \wedge G = F \cap G$ .

Questo è vero perchè  $F \cap G$  è una faccia di  $F$  e di  $G$ , e quindi di  $P$ , dalla Proposizione 2.1.3 (ii).

Inoltre, ogni faccia di  $P$  che è contenuta in  $F$  e in  $G$  deve essere contenuta in  $F \cap G$ .

Continuiamo con il punto (ii). Possiamo assumere che  $F = P$ , dalla Proposizione 2.1.3 (iii).

Ora, se  $G = \emptyset$ , tutto è chiaro.

Se  $G \neq \emptyset$ , allora c'è un vertice  $\mathbf{v} \in G$  dalla Proposizione 2.1.2 (i), che è un vertice di  $P$  dalla Proposizione 2.1.3 (iii).

A questo punto, il reticolo delle facce di  $P/\mathbf{v}$  è isomorfo all'intervallo  $[\{\mathbf{v}\}, P]$  del reticolo delle facce  $L(P)$ , dalla Proposizione 2.1.4.

Quindi concludiamo per induzione su  $\dim(G)$ .

Si pone  $P' = P/\mathbf{v}$  e si ottiene che  $[G, P]$  è isomorfo a  $[G', P']$ , dove  $G'$  viene definita secondo la Proposizione 2.1.4 e  $\dim(G') = \dim(G) - 1$ .

Per il punto (i) rimane da vedere che il reticolo  $L(P)$  è graduato.

Se  $G \subset F$  sono facce di  $P$ , allora da  $G = P \cap \text{aff}(G) \subseteq P \cap \text{aff}(F) = F$ , che vale per la Proposizione 2.1.3 (iv), possiamo concludere che  $\text{aff}(G) \subset \text{aff}(F)$ , e quindi che  $\dim(G) < \dim(F)$ .

Dunque è sufficiente mostrare che se  $\dim(F) - \dim(G) \geq 2$ , allora c'è una faccia  $H \in L(P)$  con  $G \subset H \subset F$ .

Per il punto (ii) l'intervallo  $[G, F]$  è il reticolo delle facce di un politopo di dimensione almeno 1, quindi ha un vertice, che mi dà l' $H$  desiderata.

Il punto (iii) è un caso particolare di (ii): il “diamante” è il reticolo delle facce di un politopo 1-dimensionale.

Per (iv): il reticolo delle facce di  $P^\Delta$  è l'opposto (o duale) del reticolo delle facce di  $P$ :  $L(P^\Delta) \cong L(P)^{op}$ .

Infine, per il punto (v) la prima parte è immediata dalla Proposizione 2.1.2 (i), dove gli atomi di  $L(P)$  corrispondono ai vertici di  $P$ , e la seconda parte segue da questo prendendo il poset opposto, come descritto in (iv).  $\square$

Il reticolo delle facce è la struttura appropriata per definire l'equivalenza combinatoria dei politopi.

La definizione che abbiamo dato in precedenza può essere riformulata dicendo che  $P$  e  $Q$  sono *combinatoriamente equivalenti*  $P \simeq Q$  se e solo se i reticoli delle facce sono isomorfi  $L(P) \cong L(Q)$ .

Dalla Proposizione 2.1.2, questo è equivalente ad una biiezione tra i vertici di  $P$  e di  $Q$  ( $\text{vert}(P) \leftrightarrow \text{vert}(Q)$ ), in modo che l'insieme dei vertici delle facce di  $P$  corrisponde (attraverso questa biiezione) all'insieme dei vertici delle facce di  $Q$ .

Osserviamo che è sufficiente usare i vertici e le faccette in questo contesto, perché le facce sono esattamente intersezioni di faccette e gli insiemi dei vertici delle facce sono esattamente le intersezioni degli insiemi dei vertici delle faccette. Le proprietà fondamentali sono che i reticoli delle facce sono atomici e coatomici.

## Politopi Semplici e Simpliciali

Osserviamo che per ogni  $d$ -politopo  $P$  le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) Ogni faccetta di  $P$  è un simpleso, cioè,  $P$  è simpliciale
- (ii) Ogni faccia propria di  $P$  è un simpleso
- (iii) Ogni faccetta ha  $d$  vertici
- (iv) Ogni  $k$ -faccia ha  $k + 1$  vertici, per  $k \leq d - 1$
- (v) Ogni intervallo inferiore  $[\hat{0}, F] \subseteq L(P)$  nel reticolo delle facce con  $F \neq \hat{1}$  è un poset booleano.

Analogamente, le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) Ogni figura al vertice di  $P$  è un simplelso, cioè,  $P$  è semplice
- (ii) Ogni figura al vertice iterata di  $P$  è un simplelso
- (iii) Ogni vertice sta in  $d$  faccette
- (iv) Ogni  $k$ -faccia è contenuta in  $d - k$  faccette, per  $k \geq 0$
- (v) Ogni intervallo superiore  $[F, \hat{1}] \subseteq L(P)$  nel reticolo delle facce con  $F \neq \hat{0}$  è un poset booleano.





## Capitolo 3

# Grafi di Politopi

In questo capitolo trattiamo un argomento che riguarda i grafi di politopi: la ricostruzione di Kalai dei politopi semplici a partire dal loro grafo. Prima di iniziare, mostriamo due strumenti che ci serviranno:

- vediamo cosa significa prendere un punto, una retta, un iperpiano in “posizione generale rispetto ad un politopo  $P$ ”.
- vediamo uno schema geometrico dell’algoritmo del simpleso per la programmazione lineare, che è una tecnica di ricerca importante per i politopi.

### 3.1 Rette e Funzioni Lineari in Posizione Generale

Supponiamo di avere un  $d$ -politopo  $P$  in  $\mathbb{R}^d$ , in cui  $\mathbf{0}$  è un punto interno. Alterniamo liberamente la rappresentazione in termini di vertici  $P = \text{conv}(V)$  e quella in termini di faccette  $P = P(A, \mathbf{1})$ . Qui  $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$  è una matrice che è considerata come un insieme di vettori riga,  $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ .

Consideriamo gli iperpiani in  $\mathbb{R}^d$  che determinano le faccette di  $P$ , per cui introduciamo la notazione

$$H_i := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}_i \mathbf{x} = 1\}$$

Le faccette di  $P$  sono date da  $F_i = H_i \cap P$ .

Ognuno di questi iperpiani  $H_i$  determina due semispazi, dove

$$H_i^- := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq 1\}$$

denota il semispazio chiuso che contiene  $P$ , e  $H_i^+$  denota l'altro semispazio chiuso. In particolare,

$$P = H_1^- \cap H_2^- \cap \dots \cap H_n^-.$$

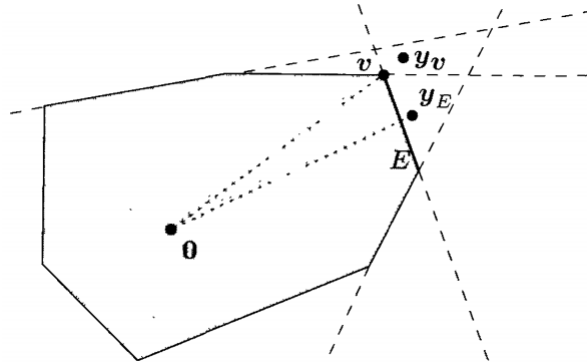
Per ogni faccia  $F \in L(P)$  sappiamo come trovare un punto nell'interno relativo di  $F$  ( $\mathbf{x}_F \in \text{relint}(F)$ ): per esempio, si può prendere il baricentro dell'insieme dei vertici di  $F$ .

Una cosa molto utile da ottenere è un punto fuori da  $P$  ma molto vicino ad  $F$ . Tale punto, in particolare, non giace su nessuno degli iperpiani  $H_i$ . Giace “in posizione generale” rispetto alla disposizione degli iperpiani  $(\mathbb{R}^d, \{H_1, \dots, H_n\})$  determinata da  $P$  (“posizione generale rispetto a  $P$ ”).

Sia  $F$  una faccia propria di  $P$ . Definiamo  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  un *punto oltre*  $F$  se  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{0} \in \text{int}(P)$  giacciono in parti opposte di  $H_i$  per ogni iperpiano  $H_i$  (che definisce una faccetta) che contiene  $F$ , ma dalla stessa parte di  $H_j$  per ogni iperpiano  $H_j$  (che definisce una faccetta) che non contiene  $F$ .

In altre parole,  $\mathbf{y}$  giace oltre  $F$  se soddisfa  $\mathbf{a}_i \mathbf{y} > 1$  per ogni disuguaglianza che è valida con l'uguaglianza per  $F$ , ma soddisfa  $\mathbf{a}_j \mathbf{y} < 1$  per ogni altra disuguaglianza.

Il disegno mostra un poligono convesso (2-politopo) e indica un vertice  $\mathbf{v}$ , un punto  $\mathbf{y}_v$  oltre  $\mathbf{v}$ , uno spigolo  $E$ , e un punto  $\mathbf{y}_E$  oltre  $E$ .



Possiamo scegliere  $\mathbf{y}_F$  sulla semiretta che parte da  $\mathbf{0}$  e passa per un punto dell'interno relativo  $\mathbf{x}_F$ . Infatti, possiamo prendere  $\mathbf{y}_F := t\mathbf{x}_F$  per ogni  $t > 1$  tale che  $\mathbf{a}_i(t\mathbf{x}_F) < 1$  quando  $0 < \mathbf{a}_i\mathbf{x}_F < 1$ .

Un altro oggetto di cui abbiamo bisogno è una retta “in posizione generale” rispetto a  $P$ .

**Definizione 3.1.** Una retta che passa per  $\mathbf{0} \in \text{int}(P)$  è *in posizione generale* rispetto a  $P$  se non è parallela a nessuno degli iperpiani  $H_i$  e non incontra l'intersezione di due qualunque di essi.

Se la retta è scritta nella forma  $L(\mathbf{u}) = \{t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$  (per qualche  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ), posizione generale significa che  $\mathbf{a}_i\mathbf{u} \neq 0$  e  $\mathbf{a}_i\mathbf{u} \neq \mathbf{a}_j\mathbf{u}$  per  $1 \leq i, j \leq n$  ( $i \neq j$ ).

Il seguente lemma mostra che un vettore direzione per tale retta può essere trovato arbitrariamente vicino a un qualunque vettore dato.

**Lemma 3.1.1.** Sia  $P = P(A, \mathbf{1})$  e sia  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbf{0}$ . Se  $\lambda > 0$  è abbastanza piccolo, allora la retta  $L(\mathbf{u}^{(\lambda)})$  è in posizione generale rispetto a  $P$ , per

$$\mathbf{u}^{(\lambda)} := \mathbf{u} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^d \end{pmatrix}.$$

*Dimostrazione.* Usiamo che  $s_i(\lambda) := \mathbf{a}_i\mathbf{u}^{(\lambda)} = \sum_{k=1}^d a_{ik}(u_k + \lambda^k)$  è un polinomio non nullo in  $\lambda$  di grado al più  $d$ , che ha al più  $d$  radici positive. I polinomi  $s_i(\lambda)$  sono distinti, dato che  $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{a}_j$  per  $i \neq j$ .

Da ciò otteniamo che  $\mathbf{a}_i\mathbf{u}^{(\lambda)} \neq 0$  per tutti, tranne al più  $d$ , valori positivi di  $\lambda$ , e che  $\mathbf{a}_i\mathbf{u}^{(\lambda)} \neq \mathbf{a}_j\mathbf{u}^{(\lambda)}$  per tutti i valori positivi con non più di  $\binom{n}{2}d$  eccezioni.  $\square$

Lo stesso metodo fornisce anche l'esistenza di un iperpiano in posizione generale, arbitrariamente vicino ad uno dato. Il modo per ottenerlo consiste nel perturbare i coefficienti della funzione lineare che definisce l'iperpiano.

**Definizione 3.2.** Una funzione lineare  $\mathbf{c}\mathbf{x}$  in  $\mathbb{R}^d$  è *in posizione generale* rispetto ad un politopo  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  se separa i vertici di  $P$ , cioè se  $\mathbf{c}\mathbf{v}_i \neq \mathbf{c}\mathbf{v}_j$  per due qualsiasi vertici distinti  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$  di  $P$ .

**Lemma 3.1.2.** Sia  $P = P(A, \mathbf{1})$  e sia  $\mathbf{c} \in (\mathbb{R}^d)^* \setminus \{0\}$ . Se  $\lambda > 0$  è abbastanza piccolo, allora la funzione lineare  $\mathbf{c}^{(\lambda)}\mathbf{x}$  è in posizione generale rispetto a  $P$  per

$$\mathbf{c}^{(\lambda)} := \mathbf{c} + (\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^d).$$

## 3.2 Orientare gli Spigoli

I vertici e gli spigoli di un  $d$ -politopo  $P$  formano un grafo non orientato  $G(P)$  che codifica molto, ma non tutto, della struttura combinatoria del politopo.

**Definizione 3.3 (Terminologia sui grafi).**

Un *grafo* è un insieme di elementi detti *nodi* o *vertici* che possono essere collegati fra loro da linee dette *archi* o *spigoli*.

In maniera formale, un grafo è una coppia ordinata  $G = (V, E)$  di insiemi, che assumiamo finiti, dove  $V$  è l'insieme dei vertici ed  $E$  è l'insieme degli spigoli. In particolare gli elementi di  $E$  sono coppie di elementi di  $V$ .

Infatti, due vertici  $u, v$  collegati da uno spigolo prendono il nome di *estremi dello spigolo* e lo spigolo viene spesso identificato con la coppia formata dai suoi estremi  $(u, v)$ .

Se  $E$  è una relazione simmetrica allora si dice che il grafo è *non orientato*, altrimenti si dice che è *orientato*.

Uno spigolo che ha due estremi coincidenti si dice *cappio*.

Un grafo non orientato e sprovvisto di cappi si dice *grafo semplice*.

L'*ordine* di un grafo è il numero dei suoi vertici  $|V|$ .

La *dimensione* è il numero dei suoi spigoli  $|E|$ .

Il *grado* di un vertice  $v \in V$  è il numero degli spigoli incidenti in  $v$ .

Il termine *grado massimo* (risp. *grado minimo*) di  $G$  indica il grado del

vertice di  $G$  con il maggiore (risp. minore) numero di spigoli incidenti.

Quando il grado massimo ed il grado minimo coincidono con un numero  $k$ , si è in presenza di un grafo  $k$ -regolare.

Un *percorso* di lunghezza  $n$  in  $G$  è dato da una sequenza di vertici  $v_0, v_1, \dots, v_n$  e da una sequenza di spigoli che li collegano  $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n)$ .

Un *cammino* è un percorso con gli spigoli a due a due distinti.

Un cammino chiuso ( $v_0 = v_n$ ) senza spigoli ripetuti viene detto *circuito*.

Un cammino chiuso ( $v_0 = v_n$ ) senza spigoli né vertici ripetuti viene detto *ciclo*.

**Definizione 3.4** (Grafo di un Politopo). Sia  $P$  un politopo convesso. I vertici e gli spigoli di  $P$  formano un grafo semplice, finito, chiamato il *grafo di  $P$*  e indicato con  $G(P)$ .

**Definizione 3.5** (Sottografo di  $G(P)$ ). Per ogni faccia  $F \in L(P)$ , indichiamo con  $G(F)$  il *sottografo di  $G(P)$  indotto* sul sottoinsieme  $\text{vert}(F) \subseteq \text{vert}(P)$  dei vertici di  $G(P)$ . Esso è il grafo formato da tutti i vertici in  $F$  e tutti gli spigoli di  $P$  tra essi. Coincide con il *grafo di  $F$* , se  $F$  stessa viene considerata come politopo.

Considereremo gli *orientamenti* di  $G(P)$ , che assegnano un *verso* ad ogni spigolo. Un orientamento è *aciclico* se in esso non c'è nessun ciclo orientato.

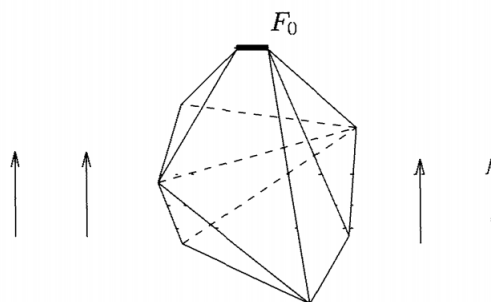
*Osservazione 12.* Questo implica (siccome tutti i grafi che consideriamo sono finiti) che c'è un *pozzo*: un vertice che non ha uno spigolo con verso che si allontana da esso. (La prova consiste nell'iniziare da un qualunque vertice e continuare a camminare lungo gli spigoli orientati fino a quando non si chiude un ciclo orientato o si rimane bloccati in un pozzo.)

La *programmazione lineare* ha il compito di trovare un punto  $\mathbf{x}_0 \in P$  che massimizza una funzione lineare  $\mathbf{c}\mathbf{x}$ , cioè tale che

$$\mathbf{c}\mathbf{x}_0 = \max\{\mathbf{c}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\} =: c_0.$$

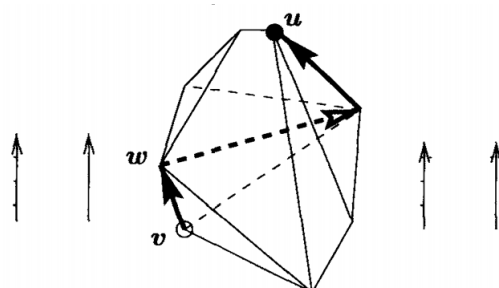
Si può vedere che il massimo è raggiunto in un vertice.

Infatti,  $F_0 := \{\mathbf{x} \in P : \mathbf{c}\mathbf{x} = c_0\}$  è una faccia di  $P$ , quindi ogni vertice di  $F_0$  massimizza  $\mathbf{c}\mathbf{x}$ .



La funzione che va massimizzata viene chiamata *funzione obiettivo*.

L'*algoritmo del simplesso*, ideato da George Dantzig nel 1947, è un metodo numerico che serve per risolvere problemi di programmazione lineare. Nella “Prima Fase” tale algoritmo trova un vertice  $\mathbf{v}$  di  $P$ . Dopodiché procede nel trovare un vertice migliore  $\mathbf{w}$  che è un *vicino* di  $\mathbf{v}$ . Usiamo  $N(\mathbf{v})$  per indicare l'insieme dei vicini di  $\mathbf{v}$ , cioè, l'insieme di tutti i  $\mathbf{w} \in \text{vert}(P)$  tali che  $\text{conv}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  è uno spigolo di  $P$ . Questo passo di miglioramento viene iterato fino a che l'algoritmo si ferma ad un vertice ottimale.



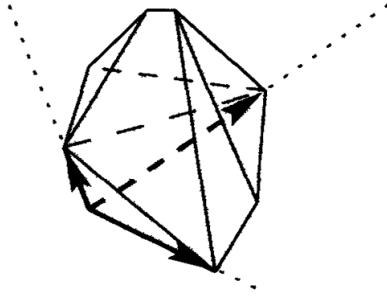
Se  $\mathbf{c}\mathbf{x}$  è in posizione generale rispetto a  $P$ , allora determina un modo ben definito per orientare il grafo di  $P$ , orientando uno spigolo  $\text{conv}\{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\}$  da  $\mathbf{v}_i$  a  $\mathbf{v}_j$  se  $\mathbf{c}\mathbf{v}_i < \mathbf{c}\mathbf{v}_j$ . (Per l'ipotesi della posizione generale, le uguaglianze non possono verificarsi.)

Chiamiamo questo l'*orientamento di  $G(P)$  indotto da  $\mathbf{c}$* .

Con questa costruzione i *cammini monotoni* su  $P$  (cammini per i quali la funzione obiettivo aumenta strettamente ad ogni passo) diventano i cammini orientati secondo l'orientamento di  $G(P)$  indotto da  $\mathbf{c}$ .

**Lemma 3.2.1.** *Sia  $\mathbf{v} \in \text{vert}(P)$  un vertice e sia  $N(\mathbf{v})$  l'insieme dei suoi vicini in  $G(P)$ . Allora il cono (basato su  $\mathbf{v}$ ) generato dai vicini di  $\mathbf{v}$  contiene  $P$ :*

$$P \subseteq \mathbf{v} + \text{cone}\{\mathbf{u} - \mathbf{v} : \mathbf{u} \in N(\mathbf{v})\}$$



*Dimostrazione.* Ciò segue dalla Proposizione 2.1.4: i vicini di  $\mathbf{v}$ , che definiscono gli spigoli che contengono  $\mathbf{v}$ , sono in corrispondenza biunivoca con i vertici della figura al vertice  $P/\mathbf{v}$ , e quindi quello che vogliamo dimostrare è equivalente a dire che questi vertici generano un cono che contiene  $P$ . Ma ogni semiretta che parte da  $\mathbf{v}$  e passa per un qualsiasi punto  $\mathbf{x} \in P$  contiene un punto della figura del vertice. Ciò implica

$$\begin{aligned} P &\subseteq \{\mathbf{v} + t(\mathbf{u} - \mathbf{v}) : \mathbf{u} \in P/\mathbf{v}, t \geq 0\} \\ &\subseteq \mathbf{v} + \text{cone}\{\mathbf{u} - \mathbf{v} : \mathbf{u} \in \text{vert}(P/\mathbf{v})\} \\ &= \mathbf{v} + \text{cone}\{\mathbf{u} - \mathbf{v} : \mathbf{u} \in N(\mathbf{v})\}. \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.2.2.** *Se  $\mathbf{c}\mathbf{x}$  è una funzione lineare in posizione generale per  $P$ , allora l'orientamento di  $G(P)$  indotto da  $\mathbf{c}$  è aciclico, con un unico pozzo. Tale pozzo è l'unico punto di  $P$  dove  $\mathbf{c}\mathbf{x}$  raggiunge il suo massimo.*

*Dimostrazione.* Lungo qualsiasi cammino orientato  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  in  $G(P)$ , il valore di  $\mathbf{c}\mathbf{x}$  aumenta strettamente. Quindi un cammino orientato non può tornare al suo vertice di partenza e non ci sono cicli orientati.

L'orientamento indotto di  $G(P)$  è dunque aciclico e, per quanto visto nell'Osservazione 12, ha un pozzo.

Supponiamo che  $v$  sia un pozzo: tutti i suoi vicini  $w \in N(v)$  soddisfano  $cw < cv$ . Dal Lemma 3.2.1 ciò implica che  $cx < cv$  vale per tutti gli  $x \in P$  con  $x \neq v$  (per tale lemma un qualsiasi punto di  $P$  sta nel cono generato dai vicini di  $v$ ). Cioè  $v$  massimizza  $cx$  su  $P$  ed è l'unico punto di  $P$  che raggiunge il massimo.  $\square$

Questo prova che per ogni vertice di partenza  $v \in \text{vert}(P)$  e per ogni funzione lineare  $cx$  che è in posizione generale rispetto a  $P$ , ogni cammino orientato finirà per condurre all'unico vertice che massimizza  $cx$  su  $P$ .

### 3.3 Il Teorema di Blind-Mani-Kalai

In questa sezione consideriamo i politopi semplici e i loro grafi. La trattazione si basa sull'articolo di Gil Kalai “**A simple way to tell a simple polytope from its graph**” [2]. Il risultato su cui ci soffermiamo è un teorema che è stato congetturato da Perles e in seguito dimostrato da Blind e Mani nel 1987. L'anno successivo Kalai trovò una dimostrazione alternativa, breve e costruttiva, che faceva uso esclusivamente di ragionamenti geometrici e combinatori.

#### **Teorema 3.3.1 (Blind & Mani).**

*Se  $P$  è un politopo semplice, allora il grafo  $G(P)$  determina l'intera struttura combinatoria di  $P$ .*

*In altre parole, se due politopi semplici hanno grafi isomorfi, allora anche i loro reticoli delle facce sono isomorfi.*

*Dimostrazione.* (Questa è la dimostrazione di Kalai del teorema.)

Si considera l'insieme di *tutti* gli orientamenti aciclici (cioè gli orientamenti degli spigoli senza cicli orientati) di  $G(P)$ .

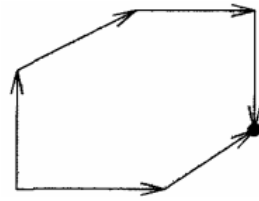
Non faremo distinzione tra un orientamento  $O$  di  $G(P)$  e l'ordine parziale indotto da  $O$  su  $\text{vert}(P)$ , che è definito da  $v \leq_O u$  quando c'è un cammino



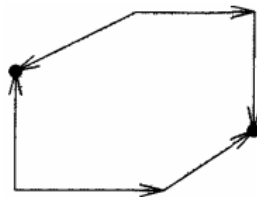
$O$ -orientato da  $v$  ad  $u$ .

Notiamo che se  $O$  è un orientamento aciclico di  $G(P)$ , la restrizione di  $G(P)$  ad ogni sottoinsieme non vuoto  $A$  di  $\text{vert}(P)$  ha un pozzo (un elemento con zero uscite) rispetto ad  $O$ .

Un orientamento aciclico  $O$  di  $G(P)$  è detto *buono* se per ogni faccia non vuota  $F$  di  $P$  il grafo  $G(F)$  ha esattamente un pozzo. Altrimenti,  $O$  è *cattivo*.



(a) buono (un pozzo)



(b) cattivo (due pozzi)

L'esistenza di buoni orientamenti di  $G(P)$  segue dal Teorema 3.2.2: se  $\mathbf{cx}$  è in posizione generale per  $P$ , allora lo è anche per tutte le facce di  $P$ .

Procediamo per passi:

1. Il primo obiettivo è distinguere tra buoni e cattivi orientamenti.

Sia  $O$  un orientamento aciclico di  $G(P)$ . Sia  $h_k^O$  il numero di vertici di  $G(P)$  con  $k$  entrate rispetto a  $O$ . Definiamo

$$f^O := h_0^O + 2h_1^O + 4h_2^O + \cdots + 2^k h_k^O + \cdots + 2^d h_d^O.$$

Se  $\mathbf{x}$  è un vertice di  $G(P)$  con  $k$  entrate rispetto ad  $O$ , allora  $\mathbf{x}$  è un pozzo in  $2^k$  facce di  $P$ . Infatti, siccome  $P$  è semplice, tutti gli  $i$  spigoli incidenti ad  $\mathbf{x}$  determinano una  $i$ -faccia  $F$  di  $P$  che li contiene.

$f^O$  è quindi il *numero totale di pozzi* indotti da  $O$  sulle facce di  $P$ .

Denotiamo con  $f$  il numero delle facce non vuote di  $P$ .

Dal momento che ogni faccia ha almeno un pozzo, vediamo che:

I.)  $f^O \geq f$

II.)  $O$  è buono se e solo se  $f^O = f$

Siccome ogni orientamento aciclico ha almeno un pozzo in ogni faccia non vuota, abbiamo che un orientamento aciclico  $O$  di  $G(P)$  è buono se e solo se ha il minimo  $f^O$  tra tutti gli orientamenti aciclici di  $G(P)$ , che coincide con il numero delle facce non vuote di  $P$ ,  $f$ .

Riassumendo: per distinguere tra buoni e cattivi orientamenti solamente dalla conoscenza di  $G(P)$ , bisogna calcolare  $f^O$  per ogni orientamento aciclico  $O$  di  $G(P)$ . Tra gli orientamenti aciclici, quelli buoni di  $G(P)$  sono quelli che hanno il minimo valore di  $f^O$ .

2. Ora mostriamo come identificare le facce di  $P$ .

**Definizione 3.6.** Con il termine *insieme iniziale* indichiamo un insieme di vertici tale che nessuno spigolo orientato conduca all'insieme.

I grafi di  $k$ -politopi semplici sono  $k$ -regolari: hanno esattamente  $k$  spigoli incidenti ad ogni vertice.

Sapendo questo, il criterio è il seguente:

**Lemma 3.3.2.** *Un sottografo  $k$ -regolare, connesso di  $G(P)$  è il grafo di una  $k$ -faccia di  $P$  se e solo se i suoi vertici sono formano un insieme iniziale rispetto a qualche orientamento buono  $O$  di  $G(P)$ .*

*Dimostrazione (Lemma).*

( $\Rightarrow$ ) Se  $F$  è una faccia di  $P$ , allora abbiamo che  $\text{vert}(F)$  forma un insieme iniziale per qualche orientamento buono.

Per vedere questo si considera una funzione lineare rispetto alla quale i vertici di  $F$  si trovano sotto tutti gli altri vertici.

Tale funzione lineare può essere ottenuta scegliendo una funzione lineare  $\mathbf{c}\mathbf{x}$  che definisce  $F$  e perturbandola come visto nel Lemma 3.1.2.

( $\Leftarrow$ ) Sia  $H$  un sottografo connesso  $k$ -regolare di  $G(P)$  e sia  $O$  un orientamento (aciclico) buono rispetto al quale  $\text{vert}(H)$  forma un insieme iniziale. Sia  $\mathbf{x}$  un pozzo di  $H$  rispetto ad  $O$ .

Ci sono  $k$  spigoli che contengono  $\mathbf{x}$  in  $H$  (poiché il sottografo è  $k$ -regolare), tutti orientati verso  $\mathbf{x}$ . Pertanto  $\mathbf{x}$  è un pozzo nella  $k$ -faccia  $F$  che contiene questi  $k$  spigoli.

Siccome l'orientamento  $O$  è buono,  $\mathbf{x}$  è l'unico pozzo di  $F$ . Quindi tutti i vertici di  $F$  sono  $\leq \mathbf{x}$ , rispetto ad  $O$ .

Ma  $\text{vert}(H)$  contiene l'insieme di tutti i vertici che sono  $\leq \mathbf{x}$  rispetto ad  $O$ . (Perché  $\text{vert}(H)$  è un insieme iniziale rispetto ad  $O$ .) Quindi,  $\text{vert}(F) \subset \text{vert}(H)$ .

Siccome entrambi  $H$  e  $G(F)$  sono  $k$ -regolari e connessi, allora  $\text{vert}(F) = \text{vert}(H)$  e  $G(F) = H$ .

□



# Bibliografia

- [1] Günter M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, 1995.
- [2] Gil Kalai, *A simple way to tell a simple polytope from its graph*, 1988.